**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**Факультет комп’ютерних наук та кібернетики  
Кафедра теорії та технології програмування

**Звіт до лабораторної роботи №1  
на тему: Розв’язання системи нелінійних рівнянь  
з дисципліни «Числові методи»**

Виконала студентка 3-го курсу

Групи  ТТП-31

Катерина СЕВЕРИНА

Київ – 2024

# Вступ

Методи чисельного розв’язання нелінійних систем рівнянь є важливими інструментами сучасної математики та інженерії, оскільки багато реальних задач мають нелінійний характер. До таких задач належать моделювання фізичних процесів, прогнозування поведінки складних систем, оптимізація та обробка даних у наукових і технічних галузях. Для їх розв’язання використовуються різні чисельні методи, зокрема метод релаксації та модифікований метод Ньютона, які є предметом дослідження даної лабораторної роботи.

Метод релаксації є одним із найпростіших у чисельній реалізації. Його ідея полягає у поступовому наближенні до розв’язку за допомогою ітераційного процесу, у якому використовується попереднє наближення. Цей метод особливо корисний для систем рівнянь, де аналітичні похідні або матриця Якобі недоступні або складні для обчислення.

Модифікований метод Ньютона є оптимізованою версією класичного методу Ньютона, яка значно знижує обчислювальні витрати. Його ключова відмінність полягає у тому, що матриця Якобі обчислюється лише один раз — на початку ітераційного процесу — і не оновлюється на кожному кроці.

Мета даної роботи – навчитися застосовувати метод релаксації та модифікований метод Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь із заданою точністю. У процесі виконання було проведено порівняльний аналіз обох методів, включно з оцінкою кількості ітерацій і точністю отриманих результатів. Обидва методи реалізовані програмно на мові С++ з метою перевірки їх збіжності та точності для розв’язання обраної системи рівнянь.

У роботі розглянуто наступні етапи: виведення алгоритмів для кожного з методів, проведення ітераційного процесу для кожного методу та аналіз отриманих результатів.

# Теоретичні відомості

1. Матриця Якобі
2. Метод релаксації

Метод грунтується на зведеннi системи нелiнiйних рiвнянь до вигляду , де , де невироджена матриця. Початкове наближення обирається довiльне.

Iтерацiйний процес має вигляд:

Достатня умова збіжності:

Якщо , де - матриця Якобі, то ітераційний процес методу релаксації збігається.

Умова припинення: , де - вектор наближеного розв’язку на *k*-ій ітерації, а - вектор розв’язку на наступній ітерації.

1. Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:

Обирається початкове наближення , для якого обчислюється матриця Якобі: .

Умова припинення методу:

# Хід роботи

Умова:

Знайти розв’язок системи з точністю .

1. Метод релаксації.

Розв’язок.

Оберемо параметр .

Зведемо систему до вигляду , де

Після обчислень маємо:

Оберемо початкове наближення (0; 0).

Ітераційний процес:

* Підставляємо початкове наближення у формулу , отримуємо нове значення
* Обчислюємо норму як максимальну абсолютну різницю між наступним вектором наближених значень і вектора на поточному кроці:
* Якщо , ітерації завершуються.

Результат обчислення програмою розв’язку рівняння:

C =

0.15 0

0 0.15

Fx=

-17 -1

x[1] = -3 + -2.55 = -5.55

x[2] = 1 + -0.15 = 0.85

Iteration 1: x = (-5.55, 0.85), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(2.55; 0.15; )|| = 2.55

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (2.55 > 0.0001)

Fx=

4.525 16.0025

x[1] = -5.55 + 0.67875 = -4.87125

x[2] = 0.85 + 2.40037 = 3.25037

Iteration 2: x = (-4.87125, 3.25037), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.67875; 2.40037; )|| = 2.40037

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (2.40037 > 0.0001)

Fx=

7.29401 5.48583

x[1] = -4.87125 + 1.0941 = -3.77715

x[2] = 3.25037 + 0.822874 = 4.07325

Iteration 3: x = (-3.77715, 4.07325), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(1.0941; 0.822874; )|| = 1.0941

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (1.0941 > 0.0001)

Fx=

3.8582 -3.43395

x[1] = -3.77715 + 0.57873 = -3.19842

x[2] = 4.07325 + -0.515092 = 3.55816

Iteration 4: x = (-3.19842, 3.55816), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.57873; 0.515092; )|| = 0.57873

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.57873 > 0.0001)

Fx=

-4.10965 -5.28327

x[1] = -3.19842 + -0.616447 = -3.81486

x[2] = 3.55816 + -0.792491 = 2.76567

Iteration 5: x = (-3.81486, 2.76567), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.616447; 0.792491; )|| = 0.792491

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.792491 > 0.0001)

Fx=

-4.7979 -0.60787

x[1] = -3.81486 + -0.719686 = -4.53455

x[2] = 2.76567 + -0.0911805 = 2.67449

Iteration 6: x = (-4.53455, 2.67449), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.719686; 0.0911805; )|| = 0.719686

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.719686 > 0.0001)

Fx=

0.715013 4.14407

x[1] = -4.53455 + 0.107252 = -4.4273

x[2] = 2.67449 + 0.621611 = 3.2961

Iteration 7: x = (-4.4273, 3.2961), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.107252; 0.621611; )|| = 0.621611

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.621611 > 0.0001)

Fx=

3.46522 2.15418

x[1] = -4.4273 + 0.519782 = -3.90752

x[2] = 3.2961 + 0.323127 = 3.61922

Iteration 8: x = (-3.90752, 3.61922), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.519782; 0.323127; )|| = 0.519782

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.519782 > 0.0001)

Fx=

1.36745 -1.7848

x[1] = -3.90752 + 0.205118 = -3.7024

x[2] = 3.61922 + -0.26772 = 3.3515

Iteration 9: x = (-3.7024, 3.3515), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.205118; 0.26772; )|| = 0.26772

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.26772 > 0.0001)

Fx=

-2.05968 -2.40005

x[1] = -3.7024 + -0.308952 = -4.01135

x[2] = 3.3515 + -0.360008 = 2.9915

Iteration 10: x = (-4.01135, 2.9915), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.308952; 0.360008; )|| = 0.360008

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.360008 > 0.0001)

Fx=

-1.96003 0.0852357

x[1] = -4.01135 + -0.294005 = -4.30535

x[2] = 2.9915 + 0.0127854 = 3.00428

Iteration 11: x = (-4.30535, 3.00428), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.294005; 0.0127854; )|| = 0.294005

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.294005 > 0.0001)

Fx=

0.561777 1.91681

x[1] = -4.30535 + 0.0842665 = -4.22109

x[2] = 3.00428 + 0.287521 = 3.2918

Iteration 12: x = (-4.22109, 3.2918), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0842665; 0.287521; )|| = 0.287521

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.287521 > 0.0001)

Fx=

1.65354 0.791803

x[1] = -4.22109 + 0.248031 = -3.97306

x[2] = 3.2918 + 0.118771 = 3.41057

Iteration 13: x = (-3.97306, 3.41057), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.248031; 0.118771; )|| = 0.248031

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.248031 > 0.0001)

Fx=

0.417183 -0.982076

x[1] = -3.97306 + 0.0625774 = -3.91048

x[2] = 3.41057 + -0.147311 = 3.26326

Iteration 14: x = (-3.91048, 3.26326), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0625774; 0.147311; )|| = 0.147311

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.147311 > 0.0001)

Fx=

-1.05928 -1.05563

x[1] = -3.91048 + -0.158892 = -4.06937

x[2] = 3.26326 + -0.158344 = 3.10492

Iteration 15: x = (-4.06937, 3.10492), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.158892; 0.158344; )|| = 0.158892

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.158892 > 0.0001)

Fx=

-0.799711 0.21121

x[1] = -4.06937 + -0.119957 = -4.18933

x[2] = 3.10492 + 0.0316815 = 3.1366

Iteration 16: x = (-4.18933, 3.1366), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.119957; 0.0316815; )|| = 0.119957

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.119957 > 0.0001)

Fx=

0.388715 0.898619

x[1] = -4.18933 + 0.0583073 = -4.13102

x[2] = 3.1366 + 0.134793 = 3.27139

Iteration 17: x = (-4.13102, 3.27139), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0583073; 0.134793; )|| = 0.134793

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.134793 > 0.0001)

Fx=

0.76733 0.260511

x[1] = -4.13102 + 0.115099 = -4.01592

x[2] = 3.27139 + 0.0390767 = 3.31047

Iteration 18: x = (-4.01592, 3.31047), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.115099; 0.0390767; )|| = 0.115099

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.115099 > 0.0001)

Fx=

0.0868182 -0.525152

x[1] = -4.01592 + 0.0130227 = -4.0029

x[2] = 3.31047 + -0.0787728 = 3.23169

Iteration 19: x = (-4.0029, 3.23169), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0130227; 0.0787728; )|| = 0.0787728

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0787728 > 0.0001)

Fx=

-0.532953 -0.445988

x[1] = -4.0029 + -0.0799429 = -4.08284

x[2] = 3.23169 + -0.0668982 = 3.1648

Iteration 20: x = (-4.08284, 3.1648), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0799429; 0.0668982; )|| = 0.0799429

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0799429 > 0.0001)

Fx=

-0.314469 0.174321

x[1] = -4.08284 + -0.0471703 = -4.13001

x[2] = 3.1648 + 0.0261481 = 3.19094

Iteration 21: x = (-4.13001, 3.19094), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0471703; 0.0261481; )|| = 0.0471703

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0471703 > 0.0001)

Fx=

0.239125 0.415086

x[1] = -4.13001 + 0.0358687 = -4.09414

x[2] = 3.19094 + 0.062263 = 3.25321

Iteration 22: x = (-4.09414, 3.25321), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0358687; 0.062263; )|| = 0.062263

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.062263 > 0.0001)

Fx=

0.345367 0.0673083

x[1] = -4.09414 + 0.051805 = -4.04234

x[2] = 3.25321 + 0.0100962 = 3.2633

Iteration 23: x = (-4.04234, 3.2633), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.051805; 0.0100962; )|| = 0.051805

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.051805 > 0.0001)

Fx=

-0.0103515 -0.270785

x[1] = -4.04234 + -0.00155273 = -4.04389

x[2] = 3.2633 + -0.0406177 = 3.22269

Iteration 24: x = (-4.04389, 3.22269), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00155273; 0.0406177; )|| = 0.0406177

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0406177 > 0.0001)

Fx=

-0.261242 -0.180099

x[1] = -4.04389 + -0.0391863 = -4.08308

x[2] = 3.22269 + -0.0270149 = 3.19567

Iteration 25: x = (-4.08308, 3.19567), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0391863; 0.0270149; )|| = 0.0391863

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0391863 > 0.0001)

Fx=

-0.116167 0.114024

x[1] = -4.08308 + -0.0174251 = -4.1005

x[2] = 3.19567 + 0.0171036 = 3.21277

Iteration 26: x = (-4.1005, 3.21277), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0174251; 0.0171036; )|| = 0.0174251

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0174251 > 0.0001)

Fx=

0.13604 0.187566

x[1] = -4.1005 + 0.0204059 = -4.0801

x[2] = 3.21277 + 0.0281349 = 3.24091

Iteration 27: x = (-4.0801, 3.24091), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0204059; 0.0281349; )|| = 0.0281349

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0281349 > 0.0001)

Fx=

0.150681 0.0051753

x[1] = -4.0801 + 0.0226021 = -4.05749

x[2] = 3.24091 + 0.000776295 = 3.24169

Iteration 28: x = (-4.05749, 3.24169), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0226021; 0.000776295; )|| = 0.0226021

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0226021 > 0.0001)

Fx=

-0.0282136 -0.1351

x[1] = -4.05749 + -0.00423203 = -4.06173

x[2] = 3.24169 + -0.020265 = 3.22142

Iteration 29: x = (-4.06173, 3.22142), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00423203; 0.020265; )|| = 0.020265

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.020265 > 0.0001)

Fx=

-0.124827 -0.068673

x[1] = -4.06173 + -0.0187241 = -4.08045

x[2] = 3.22142 + -0.010301 = 3.21112

Iteration 30: x = (-4.08045, 3.21112), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0187241; 0.010301; )|| = 0.0187241

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0187241 > 0.0001)

Fx=

-0.0386337 0.0669356

x[1] = -4.08045 + -0.00579506 = -4.08625

x[2] = 3.21112 + 0.0100403 = 3.22116

Iteration 31: x = (-4.08625, 3.22116), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00579506; 0.0100403; )|| = 0.0100403

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0100403 > 0.0001)

Fx=

0.073275 0.0825913

x[1] = -4.08625 + 0.0109913 = -4.07525

x[2] = 3.22116 + 0.0123887 = 3.23355

Iteration 32: x = (-4.07525, 3.23355), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0109913; 0.0123887; )|| = 0.0123887

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0123887 > 0.0001)

Fx=

0.0635353 -0.00990871

x[1] = -4.07525 + 0.00953029 = -4.06572

x[2] = 3.23355 + -0.00148631 = 3.23206

Iteration 33: x = (-4.06572, 3.23206), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00953029; 0.00148631; )|| = 0.00953029

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00953029 > 0.0001)

Fx=

-0.0236605 -0.0654614

x[1] = -4.06572 + -0.00354908 = -4.06927

x[2] = 3.23206 + -0.00981921 = 3.22224

Iteration 34: x = (-4.06927, 3.22224), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00354908; 0.00981921; )|| = 0.00981921

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00981921 > 0.0001)

Fx=

-0.058165 -0.0240494

x[1] = -4.06927 + -0.00872475 = -4.078

x[2] = 3.22224 + -0.00360741 = 3.21864

Iteration 35: x = (-4.078, 3.21864), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00872475; 0.00360741; )|| = 0.00872475

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00872475 > 0.0001)

Fx=

-0.010317 0.0367988

x[1] = -4.078 + -0.00154755 = -4.07955

x[2] = 3.21864 + 0.00551982 = 3.22416

Iteration 36: x = (-4.07955, 3.22416), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00154755; 0.00551982; )|| = 0.00551982

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00551982 > 0.0001)

Fx=

0.0378703 0.0352883

x[1] = -4.07955 + 0.00568054 = -4.07386

x[2] = 3.22416 + 0.00529324 = 3.22945

Iteration 37: x = (-4.07386, 3.22945), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00568054; 0.00529324; )|| = 0.00568054

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00568054 > 0.0001)

Fx=

0.025715 -0.0102529

x[1] = -4.07386 + 0.00385725 = -4.07001

x[2] = 3.22945 + -0.00153793 = 3.22791

Iteration 38: x = (-4.07001, 3.22791), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00385725; 0.00153793; )|| = 0.00385725

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00385725 > 0.0001)

Fx=

-0.0156289 -0.0308755

x[1] = -4.07001 + -0.00234434 = -4.07235

x[2] = 3.22791 + -0.00463132 = 3.22328

Iteration 39: x = (-4.07235, 3.22328), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00234434; 0.00463132; )|| = 0.00463132

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00463132 > 0.0001)

Fx=

-0.026418 -0.00721304

x[1] = -4.07235 + -0.0039627 = -4.07631

x[2] = 3.22328 + -0.00108196 = 3.2222

Iteration 40: x = (-4.07631, 3.2222), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0039627; 0.00108196; )|| = 0.0039627

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0039627 > 0.0001)

Fx=

-0.00110101 0.0193162

x[1] = -4.07631 + -0.000165151 = -4.07648

x[2] = 3.2222 + 0.00289743 = 3.2251

Iteration 41: x = (-4.07648, 3.2251), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000165151; 0.00289743; )|| = 0.00289743

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00289743 > 0.0001)

Fx=

0.018926 0.0145375

x[1] = -4.07648 + 0.0028389 = -4.07364

x[2] = 3.2251 + 0.00218062 = 3.22728

Iteration 42: x = (-4.07364, 3.22728), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0028389; 0.00218062; )|| = 0.0028389

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0028389 > 0.0001)

Fx=

0.0098588 -0.00728335

x[1] = -4.07364 + 0.00147882 = -4.07216

x[2] = 3.22728 + -0.0010925 = 3.22618

Iteration 43: x = (-4.07216, 3.22618), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00147882; 0.0010925; )|| = 0.00147882

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00147882 > 0.0001)

Fx=

-0.0092378 -0.0141869

x[1] = -4.07216 + -0.00138567 = -4.07355

x[2] = 3.22618 + -0.00212803 = 3.22406

Iteration 44: x = (-4.07355, 3.22406), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00138567; 0.00212803; )|| = 0.00212803

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00212803 > 0.0001)

Fx=

-0.0116768 -0.00141489

x[1] = -4.07355 + -0.00175153 = -4.0753

x[2] = 3.22406 + -0.000212234 = 3.22384

Iteration 45: x = (-4.0753, 3.22384), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00175153; 0.000212234; )|| = 0.00175153

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00175153 > 0.0001)

Fx=

0.00122762 0.00977945

x[1] = -4.0753 + 0.000184142 = -4.07512

x[2] = 3.22384 + 0.00146692 = 3.22531

Iteration 46: x = (-4.07512, 3.22531), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000184142; 0.00146692; )|| = 0.00146692

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00146692 > 0.0001)

Fx=

0.00918715 0.00571306

x[1] = -4.07512 + 0.00137807 = -4.07374

x[2] = 3.22531 + 0.000856959 = 3.22617

Iteration 47: x = (-4.07374, 3.22617), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00137807; 0.000856959; )|| = 0.00137807

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00137807 > 0.0001)

Fx=

0.00348609 -0.00447442

x[1] = -4.07374 + 0.000522914 = -4.07321

x[2] = 3.22617 + -0.000671163 = 3.2255

Iteration 48: x = (-4.07321, 3.2255), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000522914; 0.000671163; )|| = 0.000671163

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000671163 > 0.0001)

Fx=

-0.00510418 -0.00634642

x[1] = -4.07321 + -0.000765627 = -4.07398

x[2] = 3.2255 + -0.000951963 = 3.22454

Iteration 49: x = (-4.07398, 3.22454), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000765627; 0.000951963; )|| = 0.000951963

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000951963 > 0.0001)

Fx=

-0.00500667 0.000263964

x[1] = -4.07398 + -0.000751 = -4.07473

x[2] = 3.22454 + 3.95946e-05 = 3.22458

Iteration 50: x = (-4.07473, 3.22458), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000751; 3.95946e-05; )|| = 0.000751

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000751 > 0.0001)

Fx=

0.00136837 0.00480246

x[1] = -4.07473 + 0.000205255 = -4.07453

x[2] = 3.22458 + 0.000720369 = 3.2253

Iteration 51: x = (-4.07453, 3.2253), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000205255; 0.000720369; )|| = 0.000720369

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000720369 > 0.0001)

Fx=

0.00434199 0.00209956

x[1] = -4.07453 + 0.000651298 = -4.07387

x[2] = 3.2253 + 0.000314933 = 3.22562

Iteration 52: x = (-4.07387, 3.22562), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000651298; 0.000314933; )|| = 0.000651298

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000651298 > 0.0001)

Fx=

0.00106656 -0.00253475

x[1] = -4.07387 + 0.000159984 = -4.07371

x[2] = 3.22562 + -0.000380213 = 3.22524

Iteration 53: x = (-4.07371, 3.22524), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000159984; 0.000380213; )|| = 0.000380213

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000380213 > 0.0001)

Fx=

-0.00268962 -0.00275784

x[1] = -4.07371 + -0.000403443 = -4.07412

x[2] = 3.22524 + -0.000413676 = 3.22482

Iteration 54: x = (-4.07412, 3.22482), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000403443; 0.000413676; )|| = 0.000413676

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000413676 > 0.0001)

Fx=

-0.00207067 0.000549812

x[1] = -4.07412 + -0.000310601 = -4.07443

x[2] = 3.22482 + 8.24718e-05 = 3.22491

Iteration 55: x = (-4.07443, 3.22491), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000310601; 8.24718e-05; )|| = 0.000310601

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000310601 > 0.0001)

Fx=

0.000992194 0.00229461

x[1] = -4.07443 + 0.000148829 = -4.07428

x[2] = 3.22491 + 0.000344192 = 3.22525

Iteration 56: x = (-4.07428, 3.22525), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000148829; 0.000344192; )|| = 0.000344192

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000344192 > 0.0001)

Fx=

0.00199952 0.000691122

x[1] = -4.07428 + 0.000299928 = -4.07398

x[2] = 3.22525 + 0.000103668 = 3.22536

Iteration 57: x = (-4.07398, 3.22536), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000299928; 0.000103668; )|| = 0.000299928

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000299928 > 0.0001)

Fx=

0.000224352 -0.00136025

x[1] = -4.07398 + 3.36528e-05 = -4.07395

x[2] = 3.22536 + -0.000204038 = 3.22515

Iteration 58: x = (-4.07395, 3.22515), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(3.36528e-05; 0.000204038; )|| = 0.000204038

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000204038 > 0.0001)

Fx=

-0.00136599 -0.00115907

x[1] = -4.07395 + -0.000204899 = -4.07415

x[2] = 3.22515 + -0.000173861 = 3.22498

Iteration 59: x = (-4.07415, 3.22498), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000204899; 0.000173861; )|| = 0.000204899

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000204899 > 0.0001)

Fx=

-0.000817879 0.000448391

x[1] = -4.07415 + -0.000122682 = -4.07427

x[2] = 3.22498 + 6.72586e-05 = 3.22504

Iteration 60: x = (-4.07427, 3.22504), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000122682; 6.72586e-05; )|| = 0.000122682

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000122682 > 0.0001)

Fx=

0.000615604 0.00106817

x[1] = -4.07427 + 9.23406e-05 = -4.07418

x[2] = 3.22504 + 0.000160226 = 3.2252

Iteration 61: x = (-4.07418, 3.2252), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(9.23406e-05; 0.000160226; )|| = 0.000160226

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000160226 > 0.0001)

Fx=

0.000896669 0.00017997

x[1] = -4.07418 + 0.0001345 = -4.07405

x[2] = 3.2252 + 2.69954e-05 = 3.22523

Iteration 62: x = (-4.07405, 3.22523), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0001345; 2.69954e-05; )|| = 0.0001345

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0001345 > 0.0001)

Fx=

-2.51381e-05 -0.00070096

x[1] = -4.07405 + -3.77072e-06 = -4.07405

x[2] = 3.22523 + -0.000105144 = 3.22513

Iteration 63: x = (-4.07405, 3.22513), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(3.77072e-06; 0.000105144; )|| = 0.000105144

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000105144 > 0.0001)

Fx=

-0.00067263 -0.000467489

x[1] = -4.07405 + -0.000100895 = -4.07415

x[2] = 3.22513 + -7.01234e-05 = 3.22506

Iteration 64: x = (-4.07415, 3.22506), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000100895; 7.01234e-05; )|| = 0.000100895

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000100895 > 0.0001)

Fx=

-0.00030283 0.000293078

x[1] = -4.07415 + -4.54245e-05 = -4.0742

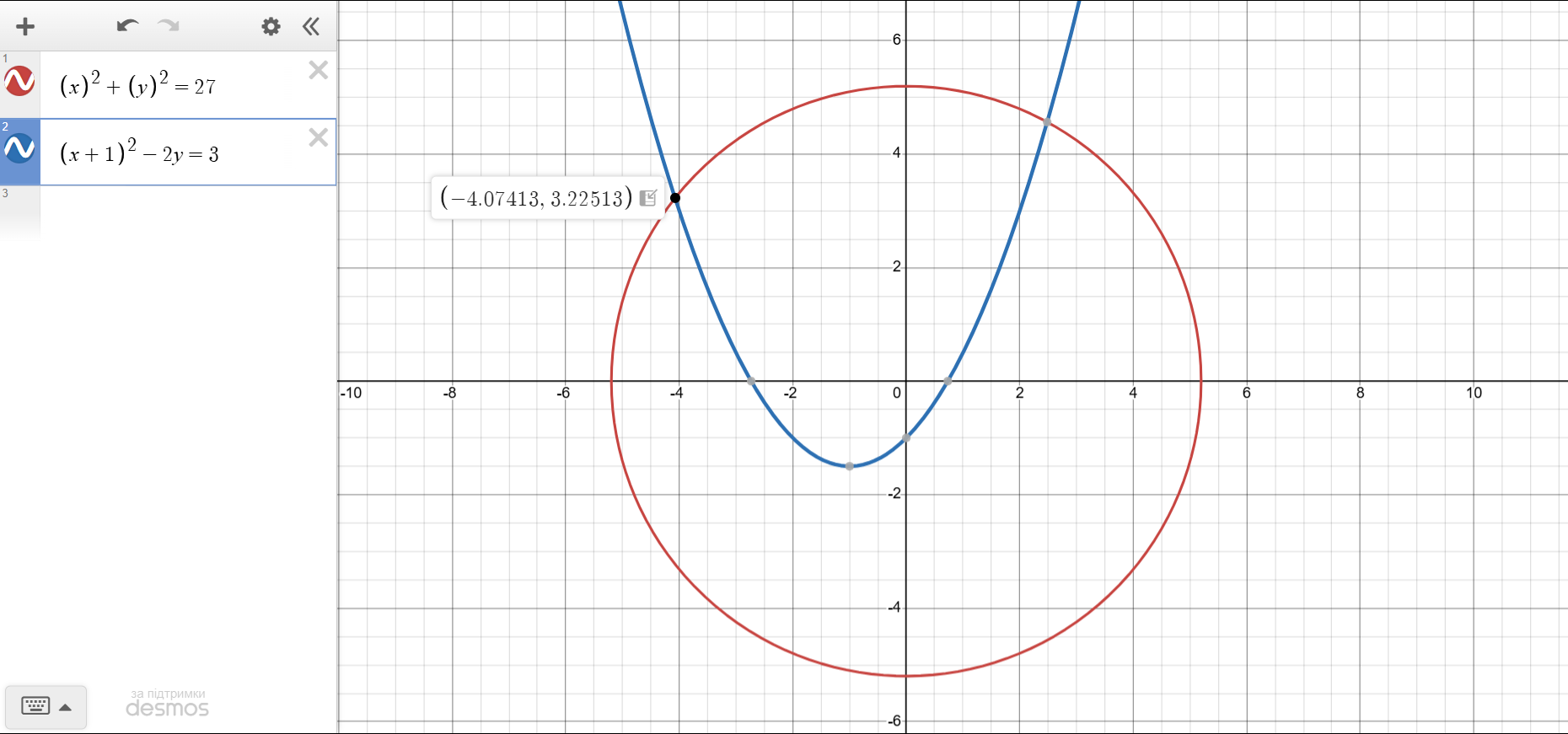
x[2] = 3.22506 + 4.39616e-05 = 3.2251

Iteration 65: x = (-4.0742, 3.2251), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(4.54245e-05; 4.39616e-05; )|| = 4.54245e-05

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| <= epsilon (4.54245e-05 <= 0.0001)

Solution=

x1 = -4.07415; x2 = 3.22506;

Отже, розв’язок системи з точністю : , було отримано за 65 ітераційних кроків. На графіку функцій, бачимо що розв’язок дійсно збігається з точністю .

1. Модифікований метод Ньютона

Покладемо початкове наближення .

Знайдемо матрицю Якобі:

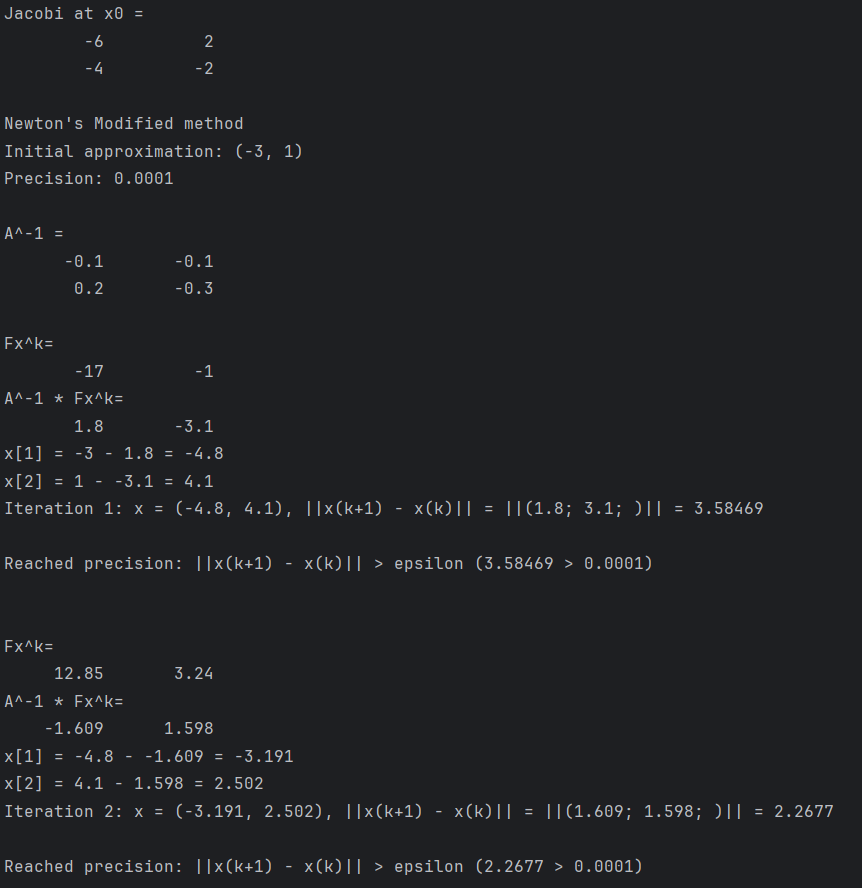
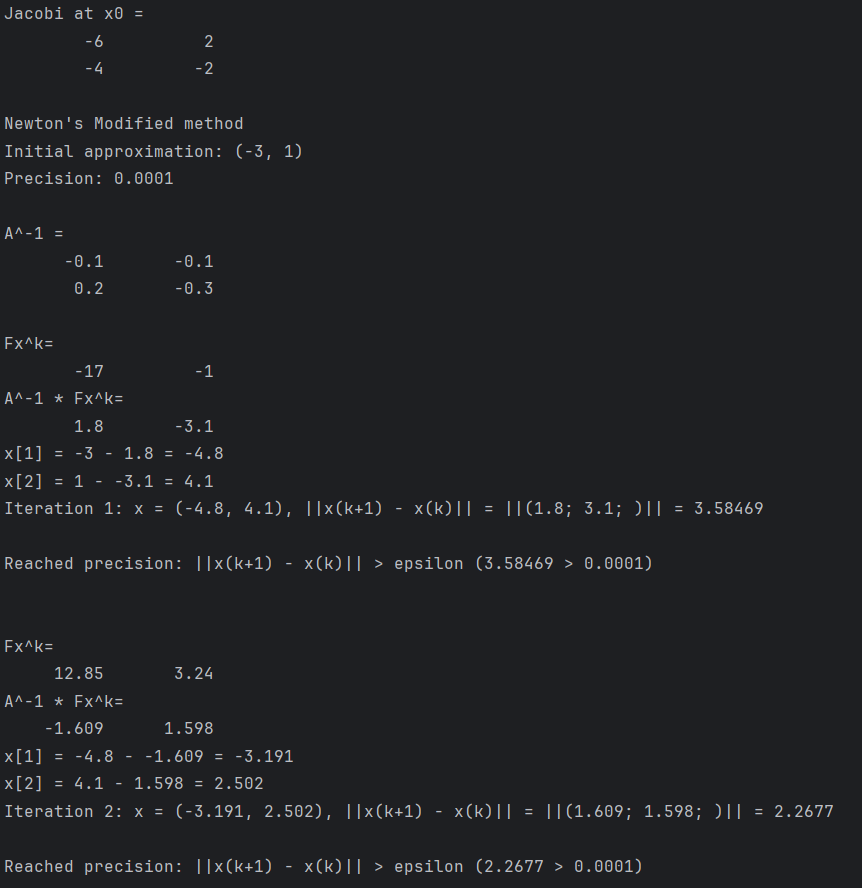
Для модифікованого методу Ньютона матриця Якобі обчислюється один раз на початку, для початкового наближення (0;0). У нашому випадку:

Ітераційний процес:

* Обчислюємо , де - поточне наближення,- обернена матриця Якобі для значень початкового наближення.
* Знаходимо новий вектор наближення:
* Перевіряємо умову зупинки, вона ідентична з методом релаксації якщо , тобто норма різниці векторів між ітераціями менше або рівна заданому наближенню ɛ, то ітерації завершуються, а - результуючий вектор:

Реалізація ітераційного процесу у програмі на С++:

Спочатку знаходиться значення матриці Якобі у значеннях початкового наближення та обернену матрицю до неї:

Після цього починається виконання ітераційного процесу, описаного раніше:

Fx^k=

-17 -1

A^-1 \* Fx^k=

1.8 -3.1

x[1] = -3 - 1.8 = -4.8

x[2] = 1 - -3.1 = 4.1

Iteration 1: x = (-4.8, 4.1), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(1.8; 3.1; )|| = 3.58469

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (3.58469 > 0.0001)

Fx^k=

12.85 3.24

A^-1 \* Fx^k=

-1.609 1.598

x[1] = -4.8 - -1.609 = -3.191

x[2] = 4.1 - 1.598 = 2.502

Iteration 2: x = (-3.191, 2.502), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(1.609; 1.598; )|| = 2.2677

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (2.2677 > 0.0001)

Fx^k=

-10.5575 -3.20352

A^-1 \* Fx^k=

1.3761 -1.15045

x[1] = -3.191 - 1.3761 = -4.5671

x[2] = 2.502 - -1.15045 = 3.65245

Iteration 3: x = (-4.5671, 3.65245), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(1.3761; 1.15045; )|| = 1.79365

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (1.79365 > 0.0001)

Fx^k=

7.1988 2.41933

A^-1 \* Fx^k=

-0.961814 0.713961

x[1] = -4.5671 - -0.961814 = -3.60529

x[2] = 3.65245 - 0.713961 = 2.93849

Iteration 4: x = (-3.60529, 2.93849), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.961814; 0.713961; )|| = 1.19784

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (1.19784 > 0.0001)

Fx^k=

-5.36719 -2.08944

A^-1 \* Fx^k=

0.745662 -0.446606

x[1] = -3.60529 - 0.745662 = -4.35095

x[2] = 2.93849 - -0.446606 = 3.38509

Iteration 5: x = (-4.35095, 3.38509), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.745662; 0.446606; )|| = 0.869177

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.869177 > 0.0001)

Fx^k=

3.38963 1.4587

A^-1 \* Fx^k=

-0.484833 0.240318

x[1] = -4.35095 - -0.484833 = -3.86612

x[2] = 3.38509 - 0.240318 = 3.14477

Iteration 6: x = (-3.86612, 3.14477), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.484833; 0.240318; )|| = 0.541124

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.541124 > 0.0001)

Fx^k=

-2.16352 -1.07491

A^-1 \* Fx^k=

0.323842 -0.11023

x[1] = -3.86612 - 0.323842 = -4.18996

x[2] = 3.14477 - -0.11023 = 3.255

Iteration 7: x = (-4.18996, 3.255), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.323842; 0.11023; )|| = 0.342089

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.342089 > 0.0001)

Fx^k=

1.15084 0.665846

A^-1 \* Fx^k=

-0.181668 0.0304133

x[1] = -4.18996 - -0.181668 = -4.00829

x[2] = 3.255 - 0.0304133 = 3.22459

Iteration 8: x = (-4.00829, 3.22459), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.181668; 0.0304133; )|| = 0.184196

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.184196 > 0.0001)

Fx^k=

-0.535592 -0.399353

A^-1 \* Fx^k=

0.0934945 0.0126875

x[1] = -4.00829 - 0.0934945 = -4.10179

x[2] = 3.22459 - 0.0126875 = 3.2119

Iteration 9: x = (-4.10179, 3.2119), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0934945; 0.0126875; )|| = 0.0943515

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0943515 > 0.0001)

Fx^k=

0.140993 0.197281

A^-1 \* Fx^k=

-0.0338274 -0.0309857

x[1] = -4.10179 - -0.0338274 = -4.06796

x[2] = 3.2119 - -0.0309857 = 3.24289

Iteration 10: x = (-4.06796, 3.24289), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0338274; 0.0309857; )|| = 0.0458738

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0458738 > 0.0001)

Fx^k=

0.0646378 -0.073397

A^-1 \* Fx^k=

0.000875924 0.0349467

x[1] = -4.06796 - 0.000875924 = -4.06884

x[2] = 3.24289 - 0.0349467 = 3.20794

Iteration 11: x = (-4.06884, 3.20794), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000875924; 0.0349467; )|| = 0.0349576

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0349576 > 0.0001)

Fx^k=

-0.15367 0.00187167

A^-1 \* Fx^k=

0.0151798 -0.0312955

x[1] = -4.06884 - 0.0151798 = -4.08402

x[2] = 3.20794 - -0.0312955 = 3.23924

Iteration 12: x = (-4.08402, 3.23924), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0151798; 0.0312955; )|| = 0.0347827

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0347827 > 0.0001)

Fx^k=

0.171857 0.03268

A^-1 \* Fx^k=

-0.0204537 0.0245674

x[1] = -4.08402 - -0.0204537 = -4.06356

x[2] = 3.23924 - 0.0245674 = 3.21467

Iteration 13: x = (-4.06356, 3.21467), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0204537; 0.0245674; )|| = 0.0319673

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0319673 > 0.0001)

Fx^k=

-0.153347 -0.0439259

A^-1 \* Fx^k=

0.0197273 -0.0174916

x[1] = -4.06356 - 0.0197273 = -4.08329

x[2] = 3.21467 - -0.0174916 = 3.23216

Iteration 14: x = (-4.08329, 3.23216), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0197273; 0.0174916; )|| = 0.0263651

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0263651 > 0.0001)

Fx^k=

0.120134 0.0423515

A^-1 \* Fx^k=

-0.0162485 0.0113213

x[1] = -4.08329 - -0.0162485 = -4.06704

x[2] = 3.23216 - 0.0113213 = 3.22084

Iteration 15: x = (-4.06704, 3.22084), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0162485; 0.0113213; )|| = 0.0198037

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0198037 > 0.0001)

Fx^k=

-0.0853535 -0.0349397

A^-1 \* Fx^k=

0.0120293 -0.00658877

x[1] = -4.06704 - 0.0120293 = -4.07907

x[2] = 3.22084 - -0.00658877 = 3.22743

Iteration 16: x = (-4.07907, 3.22743), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0120293; 0.00658877; )|| = 0.0137156

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.0137156 > 0.0001)

Fx^k=

0.0551249 0.0258163

A^-1 \* Fx^k=

-0.00809412 0.0032801

x[1] = -4.07907 - -0.00809412 = -4.07098

x[2] = 3.22743 - 0.0032801 = 3.22415

Iteration 17: x = (-4.07098, 3.22415), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00809412; 0.0032801; )|| = 0.00873349

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00873349 > 0.0001)

Fx^k=

-0.0320044 -0.0174027

A^-1 \* Fx^k=

0.00494071 -0.00118006

x[1] = -4.07098 - 0.00494071 = -4.07592

x[2] = 3.22415 - -0.00118006 = 3.22533

Iteration 18: x = (-4.07592, 3.22533), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00494071; 0.00118006; )|| = 0.00507968

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00507968 > 0.0001)

Fx^k=

0.0158578 0.0106072

A^-1 \* Fx^k=

-0.0026465 -1.05914e-05

x[1] = -4.07592 - -0.0026465 = -4.07327

x[2] = 3.22533 - -1.05914e-05 = 3.22534

Iteration 19: x = (-4.07327, 3.22534), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.0026465; 1.05914e-05; )|| = 0.00264652

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00264652 > 0.0001)

Fx^k=

-0.00564069 -0.00568783

A^-1 \* Fx^k=

0.00113285 0.000578211

x[1] = -4.07327 - 0.00113285 = -4.0744

x[2] = 3.22534 - 0.000578211 = 3.22476

Iteration 20: x = (-4.0744, 3.22476), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00113285; 0.000578211; )|| = 0.00127188

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00127188 > 0.0001)

Fx^k=

-0.0001401 0.002433

A^-1 \* Fx^k=

-0.00022929 -0.000757919

x[1] = -4.0744 - -0.00022929 = -4.07417

x[2] = 3.22476 - -0.000757919 = 3.22552

Iteration 21: x = (-4.07417, 3.22552), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.00022929; 0.000757919; )|| = 0.000791843

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000791843 > 0.0001)

Fx^k=

0.00288031 -0.000492647

A^-1 \* Fx^k=

-0.000238766 0.000723856

x[1] = -4.07417 - -0.000238766 = -4.07394

x[2] = 3.22552 - 0.000723856 = 3.2248

Iteration 22: x = (-4.07394, 3.2248), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000238766; 0.000723856; )|| = 0.000762218

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000762218 > 0.0001)

Fx^k=

-0.00373428 -0.000512896

A^-1 \* Fx^k=

0.000424718 -0.000592988

x[1] = -4.07394 - 0.000424718 = -4.07436

x[2] = 3.2248 - -0.000592988 = 3.22539

Iteration 23: x = (-4.07436, 3.22539), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000424718; 0.000592988; )|| = 0.000729397

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000729397 > 0.0001)

Fx^k=

0.00355133 0.00091242

A^-1 \* Fx^k=

-0.000446375 0.000436539

x[1] = -4.07436 - -0.000446375 = -4.07391

x[2] = 3.22539 - 0.000436539 = 3.22495

Iteration 24: x = (-4.07391, 3.22495), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000446375; 0.000436539; )|| = 0.000624353

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000624353 > 0.0001)

Fx^k=

-0.00290169 -0.000958935

A^-1 \* Fx^k=

0.000386062 -0.000292656

x[1] = -4.07391 - 0.000386062 = -4.0743

x[2] = 3.22495 - -0.000292656 = 3.22525

Iteration 25: x = (-4.0743, 3.22525), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000386062; 0.000292656; )|| = 0.00048445

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00048445 > 0.0001)

Fx^k=

0.00213172 0.000829344

A^-1 \* Fx^k=

-0.000296107 0.000177542

x[1] = -4.0743 - -0.000296107 = -4.074

x[2] = 3.22525 - 0.000177542 = 3.22507

Iteration 26: x = (-4.074, 3.22507), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000296107; 0.000177542; )|| = 0.000345254

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000345254 > 0.0001)

Fx^k=

-0.00142624 -0.000636127

A^-1 \* Fx^k=

0.000206237 -9.44104e-05

x[1] = -4.074 - 0.000206237 = -4.07421

x[2] = 3.22507 - -9.44104e-05 = 3.22516

Iteration 27: x = (-4.07421, 3.22516), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000206237; 9.44104e-05; )|| = 0.000226819

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.000226819 > 0.0001)

Fx^k=

0.000863189 0.000443041

A^-1 \* Fx^k=

-0.000130623 3.97255e-05

x[1] = -4.07421 - -0.000130623 = -4.07408

x[2] = 3.22516 - 3.97255e-05 = 3.22512

Iteration 28: x = (-4.07408, 3.22512), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(0.000130623; 3.97255e-05; )|| = 0.00013653

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| > epsilon (0.00013653 > 0.0001)

Fx^k=

-0.000457406 -0.000280616

A^-1 \* Fx^k=

7.38022e-05 -7.29631e-06

x[1] = -4.07408 - 7.38022e-05 = -4.07415

x[2] = 3.22512 - -7.29631e-06 = 3.22513

Iteration 29: x = (-4.07415, 3.22513), ||x(k+1) - x(k)|| = ||(7.38022e-05; 7.29631e-06; )|| = 7.4162e-05

Reached precision: ||x(k+1) - x(k)|| <= epsilon (7.4162e-05 <= 0.0001)

Solution=

x1 = -4.07408; x2 = 3.22512;

Отже, розв’язок системи з точністю : , що співпадає зі справжнім розв’язком з заданою точністю.

# Висновки

1. У ході роботи було розглянуто два методи чисельного розв’язання нелінійних систем рівнянь: метод релаксації та модифікований метод Ньютона. Основна мета роботи полягала у знаходженні розв’язку системи з точністю . Для цього були побудовані програми на С++, що реалізують відповідні ітераційні схеми, та проведено порівняння отриманих результатів.
2. Обидва методи дозволили знайти точний розв’язок, але модифікований метод Ньютона значно швидший: розв’язок було знайдено за 29 ітерацій, проти 65 для методу релаксації.
3. Метод релаксації забезпечив збіжність до заданої точності за 65 ітерацій, було отримано розв’язок: . Оптимальний вибір параметра τ може значно пришвидшити ітераційний процес.
4. Модифікований метод Ньютона дозволив досягти розв’язку ​ значно швидше, за 29 ітерацій. У цьому методі обчислюється значення похідних для матриці Якобі, що значно покращує швидкість збіжності.